

PACS 02.50.Ey

© 2008 г. **Е.В. КАРШАКОВ**, канд. физ.-мат. наук  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
**М.В. ХАРИЧКИН**  
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ КОМПЕНСАЦИИ ДЕВИАЦИИ АЭРОМАГНИТОМЕТРА

Рассматривается постановка задачи компенсации девиации магнитометра, возникающей при аэрогеофизической съемке, в виде стандартной стохастической задачи оценивания. Особенности этого подхода – введение стохастической модели аномалии магнитного поля Земли. Параметры стохастической модели выбираются на основании спектрального и дисперсионного анализа данных аэромагнитной съемки. Приводится нормализация параметров задачи, позволяющая оценить точность компенсации и произвести необходимую декомпозицию. Поставленная стохастическая задача оценивания решается методом калмановской фильтрации.

### 1. Введение

Магнитный метод геофизической разведки решает следующие геологические задачи: изучение платформенного фундамента, выявление и прослеживание тектонических нарушений, поиск рудных месторождений и т.д. Основой метода являются: измерение модуля магнитного поля Земли, численная обработка измерений, геологическая интерпретация полученных результатов.

Цель аэрозъемочных работ – определение аномальной составляющей магнитного поля Земли. Аномальная составляющая – отклонение значения магнитного поля от нормального, представляющего собой поле однородно намагниченного шара и дополнительных диполей в ядре, обуславливающих материковые аномалии. Аномальная часть постоянного магнитного поля Земли несет в себе информацию о геологическом строении верхних слоев земной коры.

В настоящее время требования по точности к данным аэромагнитной съемки составляют порядок  $10^{-5}$  к величине магнитного поля  $\sim 50000$  нТл (наноТесла). Ограничение во многом связано с техническими возможностями существующей съемочной аппаратуры, однако уже появляются датчики, обладающие существенно большей точностью измерений [1], и, следовательно, получение алгоритмов более сложной и качественной обработки становится важной задачей.

При проведении магнитных съемок с использованием подвижных носителей (самолета или вертолета) на датчик прибора действует не только магнитное поле Земли, но и поле самого носителя, что вызывает искажение (девиацию) результатов измерений. Проблема устранения влияния поля носителя может быть решена методом компенсации девиации.

Подходы к решению проблемы хорошо исследованы и опираются на представление магнитной девиации суммой полей, обусловленных постоянными, индуктив-

ными и вихревыми источниками, для описания которых используется модель Пуассона [2, 3]. Иногда используется также информация о высоте полета носителя для учета вертикального градиента магнитного поля Земли.

Есть несколько коммерческих программ, реализующих схожие алгоритмы компенсации. Среди них наиболее известны программы канадских компаний "Pico Elyviretec" и "RMS Instruments" [4]. Есть и российский аналог, разработанный в ФГУ НПП "Геологоразведка" [3].

Отметим, что предлагаемый в статье подход отличается от известных ранее прежде всего введением стохастической модели аномального поля. На сегодняшний день большинство производителей при обработке данных не подбирают все параметры магнитного поля. Как следствие, в некоторых алгоритмах вырабатываются свои параметры девиации для каждого из направлений полета. Разработчики ФГУ НПП "Геологоразведка" в своих алгоритмах оценивают значение вертикального градиента поля [3]. Введение же модели аномального поля позволяет учесть влияние не только вертикального, но и горизонтального градиента поля. Характер этого влияния был описан еще в 1960-х г. [5]. Полученные в результате решения задачи в такой постановке параметры девиации оказываются применимыми для любых направлений полета.

Идея введения стохастической модели аномального поля успешно применяется лабораторией управления и навигации МГУ им. М.В. Ломоносова при решении задачи аэрогравиметрии [6]. Поскольку модуль магнитного поля, как и потенциал гравитационного поля, в воздухе удовлетворяет уравнению Лапласа, аналогичный подход был предложен и при решении задачи компенсации девиации аэромагнитометра.

Цель работы – постановка и решение линейной стохастической задачи оценивания при определении параметров девиации аэромагнитометра.

## 2. Постановка задачи

Методика компенсации магнитного влияния носителя требует проведения калибровочного полета, необходимого для определения параметров девиации. Калибровочный полет предполагает подъем летательного аппарата на максимальную высоту  $h \sim 1000$  м для минимизации влияния аномального магнитного поля Земли. На этой высоте совершается ряд эволюций с углами порядка  $5^\circ$  по рысканию, крену и тангажу на четырех существенно различных курсах, необходимых для измерения вектора магнитного поля при различных ориентациях относительно носителя. Далее, после определения параметров помех, возможно проведение магнитной съемки на рабочей высоте  $h \sim 100$  м.

Для решения задачи компенсации используются два магнитометра. Первый магнитометр – квантовый, позволяющий с высокой точностью измерить модуль  $B$  магнитного поля. Вторым – феррозонд, имеющий меньшую точность, но необходимый для получения вектора  $\vec{B}_F$  магнитного поля.

При решении задачи компенсации совместно с указанными выше измерениями модуля и вектора магнитного поля необходима информация о координатах и скорости носителя, которая получается по результатам работы GPS приемника. Результатом решения задачи компенсации являются параметры магнитных помех, достаточные для обеспечения конечной точности магнитного поля в пределах  $\sim 0,1$  нТл.

В статье рассматривается сведение описанной выше задачи компенсации к стандартной постановке стохастической задачи оценивания параметров девиации. Требуется поставить замкнутую задачу оценивания, т.е. получить формирующие уравнения для аномального поля, уравнения для параметров девиации и уравнения измерений.

Математическое выражение для девиации, создаваемой магнитными массами (получено Пуассоном в 1824 г.), обозначаемой как  $\Delta\bar{B}_m$ , имеет вид [2, 3]:

$$(1) \quad \Delta\bar{B}_m = \bar{K} + L\bar{B}_0.$$

Здесь  $\bar{B}_0$  – вектор внешнего поля;  $\bar{K}$  – постоянная или жесткая компонента девиации, обусловленная полем магнито-жестких материалов, чей магнитный момент постоянен;  $L$  – тензор индуктивной или мягкой компоненты, обусловленной полем магнито-мягких материалов.

Девиация  $\Delta\bar{B}_i$ , создаваемая индукционными токами, возникает при вариациях во времени магнитного поля, при неравномерных движениях носителя или при его движении в поле с большими горизонтальными или вертикальными градиентами [2, 3]:

$$(2) \quad \Delta\bar{B}_i = M \frac{d\bar{B}_0}{dt},$$

где  $M$  – матрица влияния токов.

Модель измерений в задаче оценивания получается при совместном использовании модели полной девиации  $\Delta\bar{B}_{sum} = \Delta\bar{B}_m + \Delta\bar{B}_i$  для квантового датчика и феррозонда.

Для получения замкнутой модели оценивания модель измерений дополняется дифференциальными уравнениями (7)–(8), описывающими компоненты аномального магнитного поля и параметров девиации. В нашей постановке задачи параметры девиации полагаются постоянными. Поле описывается стохастической моделью, параметры которой выбираются на основании спектрального и дисперсионного анализа реальных данных.

### 3. Нормализация параметров задачи

Накопленный опыт позволяет задаться характерными значениями параметров девиации для распространенных летательных аппаратов, таких как Ан-2 в России и Cessna Caravan за рубежом, и произвести нормализацию модели магнитных помех в соответствии с [7] и ее упрощение с учетом появляющегося безразмерного малого параметра  $\varepsilon \sim 0,1$ .

Приведем характерные значения основных параметров девиации для максимальной и рабочей высоты. Характерные значения переменных определяются максимальными по модулю значениями их физических величин на рассматриваемом интервале времени [7].

$B_* = 50000$  нТл – характерное значение магнитного поля Земли;

$\Delta B_{m*} = 50$  нТл – характерные значения помех, создаваемых магнитными массами;

$\Delta B_{i*} = 1$  нТл – характерные значения помех, создаваемых полем вихревых токов;

$T_* = 5$  с – характерное время совершения эволюции;

$V_* = 50$  м/с – характерная скорость летательного аппарата;

$\nabla B_* = 1$  нТл/м – характерное значение градиентов магнитного поля при  $h \sim 100$  м, в сильно градиентных полях может достигать и 10 нТл/м;

$\nabla B_* = 0,01$  нТл/м – характерное значение градиентов магнитного поля при  $h \sim 1000$  м;

$T_a = B_*(\nabla B_* V_*)^{-1} = 1000$  с – характерное время аномалии при  $h \sim 100$  м, возможны зоны, где  $T_a = 100$  с;

$T_a = B_*(\nabla B_* V_*)^{-1} = 100000$  с – характерное время аномалии при  $h \sim 1000$  м. Магнитное поле с учетом девиации выражается по формуле [3]:

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \Delta \bar{B}_m + \Delta \bar{B}_i = \bar{B}_0 + \bar{K} + L\bar{B}_0 + M \frac{d\bar{B}_0}{dt}.$$

Выпишем формулу для производной вектора магнитного поля по времени:

$$\frac{d\bar{B}_0}{dt} = \frac{d(B_0 \bar{e}_0)}{dt} = \frac{dB_0}{dt} \bar{e}_0 + \bar{B}_0 \frac{d\bar{e}_0}{dt},$$

где  $\bar{e}_0$  – единичный вектор, по направлению совпадающий с  $\bar{B}_0$ . Введем обозначение для новых нормализованных переменных:

$$\tau = \frac{t}{T_*}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{B}}{B_*}, \quad \bar{b}_0 = \frac{\bar{B}_0}{B_*}, \quad b = \frac{B}{B_*}, \quad b_0 = \frac{B_0}{B_*},$$

откуда

$$\frac{d\bar{e}_0}{dt} = \frac{1}{T_*} \frac{d\bar{e}_0}{d\tau}, \quad \frac{dB_0}{dt} = \nabla B_* V_* \frac{db_0}{d\tau} = \frac{B_*}{T_a} \frac{db_0}{d\tau}.$$

С учетом последних формул нормализуем выражение для магнитных помех.

$$B_* \bar{b} = B_* \bar{b}_0 + \bar{K} + LB_* \bar{b}_0 + Mb_0 \frac{B_*}{T_*} \frac{d\bar{e}_0}{d\tau} + M \frac{B_*}{T_a} \frac{db_0}{d\tau} \bar{e}_0,$$

или, если переписать в соответственном порядке,

$$\bar{b} = \bar{b}_0 + \bar{k} + [l] \bar{b}_0 + [m] b_0 \frac{d\bar{e}_0}{d\tau} + [m] \frac{T_*}{T_a} \frac{db_0}{d\tau} \bar{e}_0.$$

Оценим порядок безразмерного вектора  $\bar{k}$  и компонент матриц  $[l]$  и  $[m]$ :

$$|\bar{k}| = \frac{|\bar{K}|}{B_*} \sim \frac{\Delta B_{m*}}{B_*} \sim 10^{-3} = \varepsilon^3, \quad l_{ij} = L_{ij} \sim \frac{\Delta B_{m*}}{B_*} \sim 10^{-3} = \varepsilon^3.$$

Учитывая, что  $T_*/T_a \ll 1$  и предполагая однородность проводящих материалов, наличие которых приводит к появлению вихревой компоненты девиации, получим

$$\Delta B_{i*} \sim \frac{M_{ij} B_*}{T_*} \Rightarrow M_{ij} \sim \frac{\Delta B_{i*} T_*}{B_*},$$

$$m_{ij} = \frac{M_{ij}}{T_*} = \frac{\Delta B_{i*}}{B_*} = 10^{-4} = \varepsilon^4,$$

$$m_{ij} \frac{T_*}{T_a} \sim 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot \varepsilon^4 \sim \varepsilon^6 \quad \text{при } 100 \text{ м,}$$

$$m_{ij} \frac{T_*}{T_a} \sim 0,5 \cdot 10^{-4} \cdot \varepsilon^4 \sim \varepsilon^8 \quad \text{при } 1000 \text{ м.}$$

Таким образом, можно переписать выражение для магнитных помех с учетом порядков малости входящих в них величин для случаев максимальной и рабочей высоты:

$$(3) \quad \bar{b} = \bar{b}_0 + \varepsilon^3 \check{\bar{K}} + \varepsilon^3 \left( \check{L} + \varepsilon^5 \frac{\check{M}}{b_0} \frac{db_0}{d\tau} \right) \bar{b}_0 + \varepsilon^4 \check{M} b_0 \frac{d\bar{e}_0}{d\tau} \quad \text{при } h \sim 1000 \text{ м,}$$

$$(4) \quad \bar{b} = \bar{b}_0 + \varepsilon^3 \check{\bar{K}} + \varepsilon^3 \left( \check{L} + \varepsilon^3 \frac{\check{M}}{b_0} \frac{db_0}{d\tau} \right) \bar{b}_0 + \varepsilon^4 \check{M} b_0 \frac{d\bar{e}_0}{d\tau} \quad \text{при } h \sim 100 \text{ м,}$$

где  $|\check{\bar{K}}|$ ,  $\check{L}_{ij}$ ,  $\check{M}_{ij}$  – величины порядка 1.

#### 4. Скалярная модель измерений

В данном разделе выпишем скалярную модель измерений скалярного магнитометра в разложении по малому параметру (для максимальной высоты порядка 1000 м) с точностью до  $\varepsilon^6$  включительно. Выпишем соотношение (3) для точек расположения скалярного и векторного (с индексом  $F$  – феррозонд) датчиков совместно, в единичных векторах:

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \left( \bar{e}_0 + \varepsilon^3 \check{L} \bar{e}_0 + \varepsilon^4 \check{M} \frac{d\bar{e}_0}{d\tau} \right) \frac{b_0}{b} + \varepsilon^3 \frac{\check{K}}{b}, \\ \bar{e}_F &= \left( \bar{e}_0 + \varepsilon^3 \check{L}_F \bar{e}_0 + \varepsilon^4 \check{M}_F \frac{d\bar{e}_0}{d\tau} \right) \frac{b_0}{b} + \varepsilon^3 \frac{\check{K}_F}{b}.\end{aligned}$$

Рассматривая эти соотношения совместно, можно выразить  $b = \bar{b}^T \bar{e}$  через вектора  $\bar{b}_F$  и  $\bar{e}_F$ .

$$(5) \quad b = b_0 + \varepsilon^3 \bar{e}_F^T \check{K} + 0,5 \varepsilon^3 \bar{e}_F^T L_S \bar{b}_F + \varepsilon^4 \bar{b}_F^T M \frac{d\bar{e}_F}{d\tau} + \varepsilon^6 C + o(\varepsilon^6).$$

Здесь  $L_S = L + L^T$  – симметричная матрица,  $C$  – скалярная константа,  $K = (K_i)$ ,  $L = (L_{ij})$ ,  $M = (M_{ij})$ . Константу  $C$  можно не рассматривать, поскольку в современной геофизике целью аэросъемочных работ является определение аномальной составляющей магнитного поля Земли. Для остальных компонент при анализе наблюдаемости полученной модели можно показать, что она содержит 16 наблюдаемых параметров:

$$\begin{aligned}K_1, K_2, K_3, \Delta L_{11}, L_{12}, \Delta L_{22}, L_{13}, L_{23}, \\ \Delta M_{11}, \Delta M_{22}, M_{12}, M_{21}, M_{13}, M_{31}, M_{23}, M_{32}, \\ \Delta L_{ii} = L_{ii} - L_{33}, \quad \Delta M_{ii} = M_{ii} - M_{33}.\end{aligned}$$

Оставшиеся параметры матриц  $L_S$ ,  $M$  не входят в силу симметричности матрицы  $L_S$  и тождеств

$$\bar{e}_F^T \frac{d\bar{e}_F}{d\tau} \equiv 0, \quad \bar{e}_F^T \bar{e}_F \equiv 1.$$

Отметим, что для рабочей высоты (порядка 100 м) в скалярной модели девиации добавляется еще один член порядка  $\varepsilon^6$ , как видно из формулы (4). Он связан с производной по времени модуля внешнего поля  $dB_0/dt$ , обусловленной сравнительно большим градиентом. Его влияние невозможно учесть в силу малости при калибровочном полете, но на рабочих высотах оно становится существенно. Таким образом, в отдельных случаях для повышения точности компенсации необходимо произвести оценку дополнительного члена в модели. Для этого следует обработать точки пересечения маршрутов съемки, которые, как правило, присутствуют.

#### 5. Стохастическая модель поля

При подборе модели аномалии магнитного поля воспользуемся идеями, реализованными при решении задачи аэрогравиметрии [6]. Рассмотрим линейную в отклонениях от горизонтальной плоскости модель магнитного поля Земли для высот  $\sim 1000$  м:

$$(6) \quad B_0(x, y, z) = B^h(x, y) + B_z(x, y, z_0) \Delta z, \quad B_z(x, y, z_0) = \left. \frac{\partial B_0}{\partial z} \right|_{z=z_0}.$$

Здесь  $B_z$  – вертикальный градиент магнитного поля;  $\Delta z = (z - z_0)$  – отклонение от горизонтальной плоскости  $z = z_0$ . Будем отдельно моделировать магнитное поле  $B^h$  в плоскости и вертикальный градиент  $B_z$  случайными процессами. В качестве последних выберем интегралы от белого шума 3-го и 2-го порядка соответственно для поля и вертикального градиента. Выбор порядков модели обусловлен спектральными характеристиками магнитного поля, о чем будет сказано далее.

Сделаем еще одно допущение. Будем считать горизонтальные проекции линий пути прямолинейными. Это является допустимым, так как по опыту боковые отклонения летательного аппарата малы – порядка 5 – 10 м, тогда как изменения высоты достигают 100 м и более. Это является корректным, так как на высотах  $\sim 1000$  м величина градиента  $\sim 0,01$  нТл/м. Из прямолинейности маршрутов следует, что движение в плоскости можно задать одним единственным параметром  $x$ , а скорость движения вдоль маршрута –  $V = dx/dt$ . Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dB^h}{dt} &= \frac{\partial B^h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = VB_x^h, \\ \frac{dB_x^h}{dt} &= \frac{\partial B_x^h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = VB_{xx}^h, & \frac{dB_{xx}^h}{dt} &= \frac{\partial B_{xx}^h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = Vq_1, \\ \frac{dB_z}{dt} &= \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} = VB_{zx}, & \frac{dB_{zx}}{dt} &= \frac{\partial B_{zx}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = Vq_2. \end{aligned}$$

Здесь  $q_1, q_2$  – нормальные случайные процессы типа белого шума. Перепишем уравнения в матричном виде.

$$(7) \quad \dot{\bar{X}}_1 = A_1 \bar{X}_1 + v\bar{q}_1,$$

где

$$(8) \quad \bar{X}_1 = \begin{pmatrix} B^h \\ B_x^h \\ B_{xx}^h \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & V \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{pmatrix};$$

$$\dot{\bar{X}}_2 = A_2 \bar{X}_2 + v\bar{q}_2,$$

где

$$\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} B_z \\ B_{zx} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \end{pmatrix};$$

$$M[\bar{q}_i] = 0, \quad M[\bar{q}_i(t) \bar{q}_i^T(s)] = Q_i \delta(t-s) \quad \text{при } i = 1, 2;$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция,  $\sigma_1, \sigma_2$  – среднеквадратичные отклонения.

Для оценки параметров  $\sigma_1, \sigma_2$  воспользуемся дисперсионными уравнениями:

$$\dot{P}_x = AP_x + P_x A^T + Q,$$

где  $P_x(t) = M[\bar{X}_i(t) \bar{X}_i^T(s)]$  – ковариационная матрица.

Оценим параметр  $\sigma_1$  для поля в плоскости.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Vp_{12} & V(p_{22} + p_{13}) & Vp_{23} \\ V(p_{22} + p_{13}) & 2Vp_{23} & Vp_{33} \\ Vp_{23} & Vp_{33} & V\sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

Решая дисперсионное уравнение при нулевых начальных условиях, получаем выражения для компонент матрицы  $P_x$ . В частности, для  $p_{11}$

$$p_{11} = \frac{V^5 t^5 \sigma_1^2}{20}.$$

Для определения параметра  $\sigma_1$  зададим граничное условие на  $p_{11}$ . Исходя из реальных данных, на расстояниях порядка 1000 м, т.е. при характерной скорости  $V = 50$  м/с за характерное время  $t \sim 20$  с, значение поля меняется на величину порядка 30 нТл ( $p_{11} \sim 30^2 \sim 10^3$  нТл).

$$p_{11} = \frac{50^5 20^5 \sigma_1^2}{20} \sim 10^3 \Rightarrow \sigma_1 \sim 10^{-6}.$$

Убедимся, что полученная модель для поля в плоскости с параметром  $\sigma_1 \sim 10^{-6}$  не проявляет себя на временах эволюций  $t \sim 1$  с (на длинах  $\sim 50$  м), т.е. меняется на величину порядка шумов 0,01 нТл:

$$p_{11} = \frac{50^5 1^5 10^{-12}}{20} \sim 1,5 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{p_{11}} \sim 0,004.$$

Кроме того, необходимо соблюсти условия, требующие адекватности величины горизонтального градиента. Исходя из реальных данных на временах эволюции  $t \sim 20$  с значение вертикального градиента меняется на величину порядка 0,01 нТл/м:

$$p_{22} = \frac{V^3 t^3 \sigma_1^2}{3} = \frac{50^3 20^3 10^{-12}}{3} \sim 3,33 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \sqrt{p_{22}} \sim 0,02.$$

Отметим, что при выборе модели аномалии магнитного поля меньшего порядка существенно увеличивается значение  $\sqrt{p_{11}}$  на временах эволюций  $t \sim 1$  с, в частности для модели второго порядка  $\sqrt{p_{11}} \sim 0,2$ , что на порядок больше предполагаемых шумов измерений. Тем самым показано, что выбор модели третьего порядка вполне оправдан при заданных характерных значениях аномального магнитного поля.

Для анализа модели вертикального градиента удобно перейти к рассмотрению в частотной области, применив двумерное преобразование Фурье:

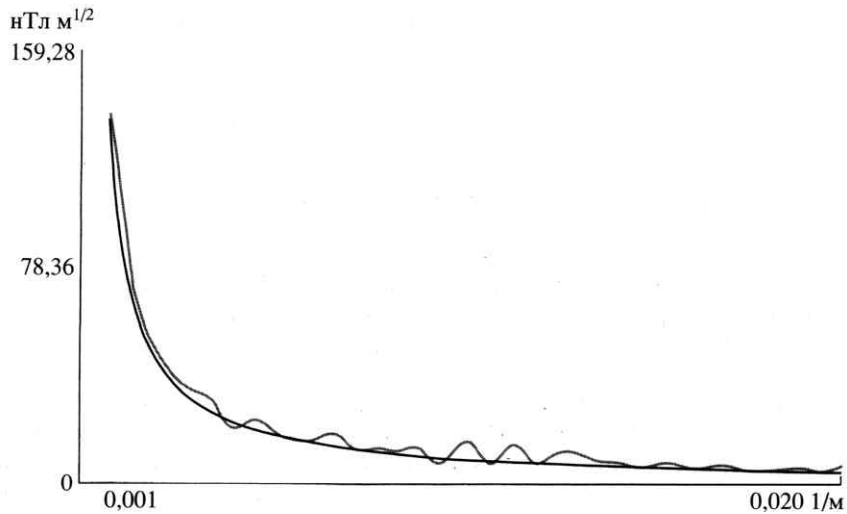
$$\tilde{B}_0(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k_x x + k_y y)} B_0(x, y, z) dx dy.$$

Поле  $B_0(x, y, z)$  в воздухе удовлетворяет уравнению Лапласа  $\partial^2 B_0 / \partial x^2 + \partial^2 B_0 / \partial y^2 + \partial^2 B_0 / \partial z^2 = 0$ . Поэтому верны все формулы редукции аномалии вдоль вертикали, в частности, для спектра вертикального градиента верно равенство [6]

$$\tilde{B}_z = -\omega \tilde{B}_0, \quad \omega = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

Выищем выражение спектра вертикального градиента с учетом свойств горизонтального градиента:

$$\tilde{B}_x = -ik_x \tilde{B}_0, \quad \tilde{B}_y = -ik_y \tilde{B}_0 \Rightarrow \tilde{B}_z = i\sqrt{\tilde{B}_x^2 + \tilde{B}_y^2}.$$



Спектральная плотность поля в горизонтальной плоскости на высоте порядка 1 км.

Очевидно, что модель вертикального градиента в смысле спектральной плотности должна быть такой же, как модель горизонтального. Таким образом, задав  $\sigma_2 = \sigma_1$  и взяв модель второго порядка, получим требуемые характерные параметры градиента, такие как, в частности,  $p_{22}$ .

Построим графики спектральной плотности для поля  $B^h$  (рисунок), вычисленной для реальных измерений магнитного поля (серый) и полученной на основании формирующих уравнений (черный). Оценка спектральной плотности по реальным данным проводилась на основании периодограммы показаний скалярного магнитометра. Из графика можно видеть, что спектральная плотность модели аномального поля подобрана достаточно хорошо.

## 6. Постановка и решение задачи оценивания

Выпишем вектор состояния  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = (K_1, K_2, K_3, \Delta L_{11}, L_{12}, L_{13}, \Delta L_{22}, L_{23}, \Delta M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, \Delta M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, B^h, B_x^h, B_{xx}^h, B_z, B_{zx})^T = (x_1, \dots, x_{21})^T.$$

Здесь первые 16 координат являются наблюдаемыми параметрами скалярной модели (5), а последние 5 координат – параметрами стохастической модели магнитного поля (7), (8).

Для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений на вектор  $x$  используем предположение о постоянстве параметров девиации и соотношения (7), (8).

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= 0 \quad \text{при } i = 1, \dots, 16; \\ \frac{dx_{17}}{dt} &= Vx_{18}, \quad \frac{dx_{18}}{dt} = Vx_{19}, \quad \frac{dx_{19}}{dt} = Vq_1; \quad \frac{dx_{20}}{dt} = Vx_{21}, \quad \frac{dx_{21}}{dt} = Vq_2; \\ M[q_j] &= 0, \quad M[q_j(t)q_i^T(s)] = \sigma_j^2 \delta(t-s), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$



За основу модели измерений возьмем скалярную модель измерений, принимая  $z = B$ :

$$(10) \quad z = x_{17} + x_{20}(h - h_0) + x_{1e_1} + x_{2e_2} + x_{3e_3} + x_4 e_1^2 + x_7 e_2^2 + x_5 e_1 e_2 + \\ + x_6 e_1 e_3 + x_8 e_2 e_3 + x_9 e_1 \frac{de_1}{dt} + x_{13} e_2 \frac{de_2}{dt} + x_{10} e_1 \frac{de_2}{dt} + x_{12} e_2 \frac{de_1}{dt} + \\ + x_{11} e_1 \frac{de_3}{dt} + x_{15} e_3 \frac{de_1}{dt} + x_{14} e_2 \frac{de_3}{dt} + x_{16} e_3 \frac{de_2}{dt} + r.$$

Поставленная стохастическая задача оценивания (9)–(10) решается методом калмановской фильтрации [8]. При работе с реальными данными  $V$  и  $h$  определяются по информации GPS-приемника;  $e_i$  определяются по показаниям феррозондового датчика; параметры  $\sigma_1, \sigma_2$  для  $q_1, q_2$  выбираются исходя из спектральных характеристик магнитного поля  $10^{-6}$ ; параметр  $\sigma_r$  шумовой составляющей измерений  $r$  выбирается в соответствии с характеристиками измерительной аппаратуры.

Для обеспечения сходимости оценки аномального поля, описанного системой уравнений, решение которой неустойчиво, дополнительно производится обработка близких точек маршрутов разного направления. При этом предполагается, что расхождение значения аномального магнитного поля прямо пропорционально его градиенту. Поэтому при калибровке очень важно наличие центральной точки, через которую приблизительно проходят маршруты всех четырех направлений.

## 7. Заключение

Рассмотрено сведение задачи компенсации девиации магнитометра к стандартной постановке стохастической задачи оценивания. Важная особенность данного подхода – введение стохастической модели аномалии магнитного поля Земли. Ее параметры были выбраны на основании спектрального и дисперсионного анализа данных аэромагнитной съемки.

В статье также проведена нормализация параметров задачи. Нормализация позволила оценить точность компенсации, получить скалярную модель измерения заданной точности и произвести необходимую декомпозицию задачи.

Поставленная стохастическая задача оценивания решается методом калмановской фильтрации. На основании предложенного алгоритма произведена обработка данных магнитной съемки, некоторые результаты которой опубликованы в [9]. Точность компенсации составила порядка 0,1 нТл. При этом в одном из вариантов калибровочный полет осуществлялся курсами 45, 135, 225 и 315°, а съемка велась по маршрутам с курсами 0 и 180°.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вершовский А.К., Пазгалев А.С., Александров Е.Б.* Проект А-СТС магнитометра // Журн. техн. физики. 2000. Т. 70. Вып. 1. С. 88–93.
2. *Лысенко А.П.* Теория и методы компенсации магнитных помех // Геофизич. приборостроение. Вып. 7. Ленинград, 1960.
3. *Могилевкин В.А., Аверкиев В.В., Герловин М.С. и др.* Компенсация магнитных помех авиационных носителей // Разведка и охрана недр. 2001. № 9. С. 52–58.
4. *Brian Sylvester* Exploration Trends and Developments // Geological Survey of Canada, Ottawa, March, 2006.
5. *Резник Э.Е., Канторович В.Л.* Некоторые проблемы компенсации магнитных полей самолета // Геофизич. приборостроение. Вып. 18. Ленинград, 1964.

6. *Болотин Ю.В., Голован А.А., Парусников Н.А.* Уравнения аэрогравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2002.
7. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во механ.-мат. ф-та МГУ, 1995.
8. *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С. и др.* Оптимизация динамики управляемых систем. М.: Изд-во МГУ, 2000.
9. *Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Харичкин М.В.* Система аэромагнитной съемки аномалий магнитного поля // Датчики и системы. 2007. № 8. С. 17–21.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.*

Поступила в редакцию 15.05.2007